



ce
pre
UNI

Trigonometría

**CICLO
PRE
2024 - I**

✓ **INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA
ANALÍTICA**



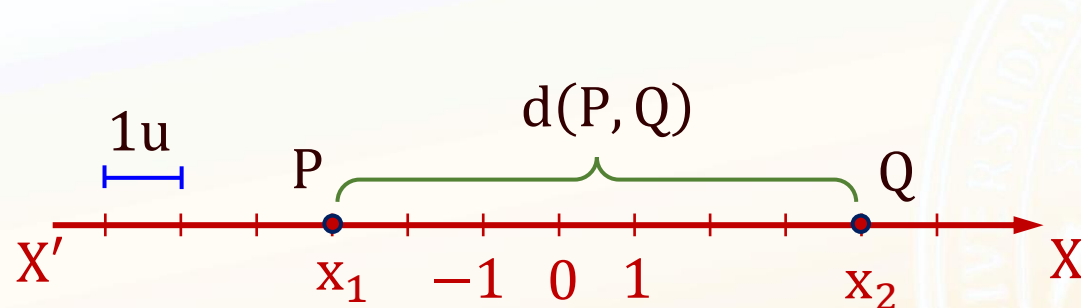
LA RECTA NUMÉRICA

Definición:

La recta numérica es la representación gráfica del conjunto de los números reales sobre una recta. A cada punto le corresponde un único número real y deben estar ordenados.

Observación:

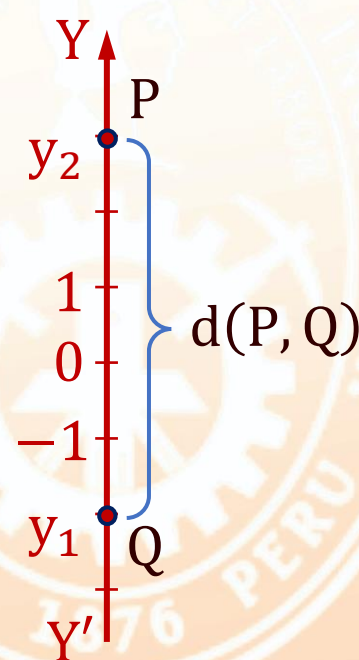
En la recta real, definimos la distancia entre dos puntos, como el valor absoluto de la diferencia de los números reales que le corresponden a dichos puntos.



$$d(P, Q) = x_2 - x_1$$

En general:

$$d(P, Q) = |x_2 - x_1|$$



$$d(P, Q) = y_2 - y_1$$

En general:

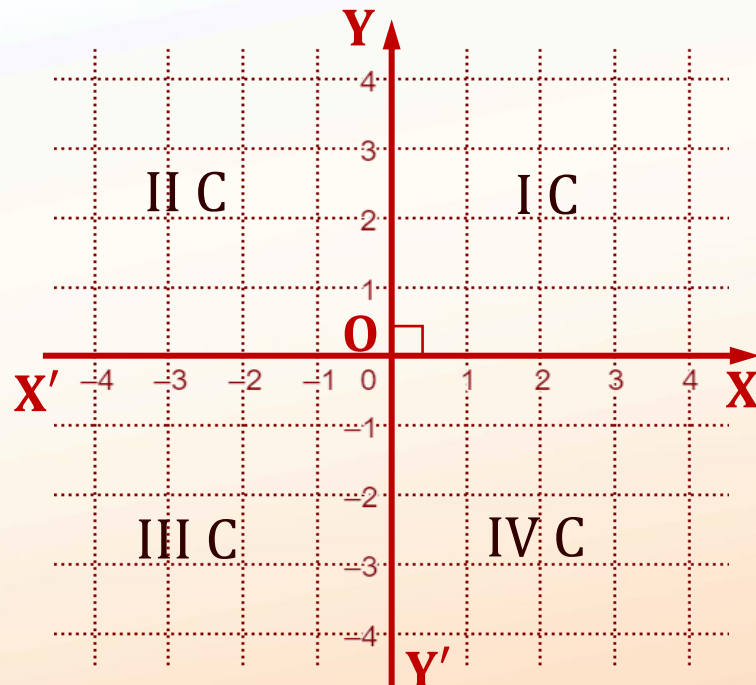
$$d(P, Q) = |y_2 - y_1|$$

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Definición:

Un sistema de coordenadas rectangulares, también llamado **plano cartesiano**, es un sistema de referencia sobre un plano, formado por dos rectas (numéricas) perpendiculares que se intersecan en un punto denominado **origen de coordenadas**. A estas rectas se les llama **ejes coordenados**.

Podemos diferenciar cuatro regiones del plano cartesiano delimitado por los ejes coordenados, a los cuales llamaremos **cuadrantes**.



En el gráfico:

O: Origen del sistema

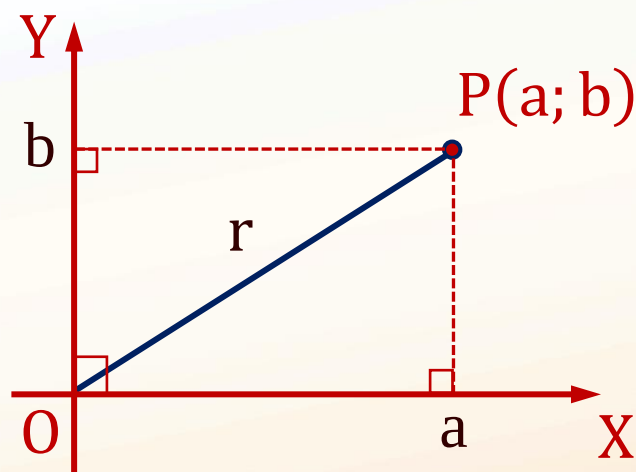
$\overrightarrow{X'X}$: eje de abscisas (eje X)

$\overrightarrow{Y'Y}$: eje de ordenadas (eje Y)

REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO

Un punto P del plano, queda representado en el sistema de coordenadas cartesianas por un par ordenado $(a; b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. El punto se denota como $P(a; b)$.

Al valor a se le llama **abscisa del punto P** y se **ubica en el eje de abscisas** y al valor b se le llama **ordenada del punto P** y se ubica en el **eje de ordenadas**.



$(a; b)$: par ordenado

a : abscisa de P

b : ordenada de P

r : distancia del punto P al origen.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OBSERVACIÓN:

Sea $P(a; b)$ un punto del plano cartesiano, considerando una rotación de 90° en **sentido antihorario** al segmento $\overline{OP}$, obtenemos el segmento $\overline{OQ}$, donde $Q = (-b; a)$.

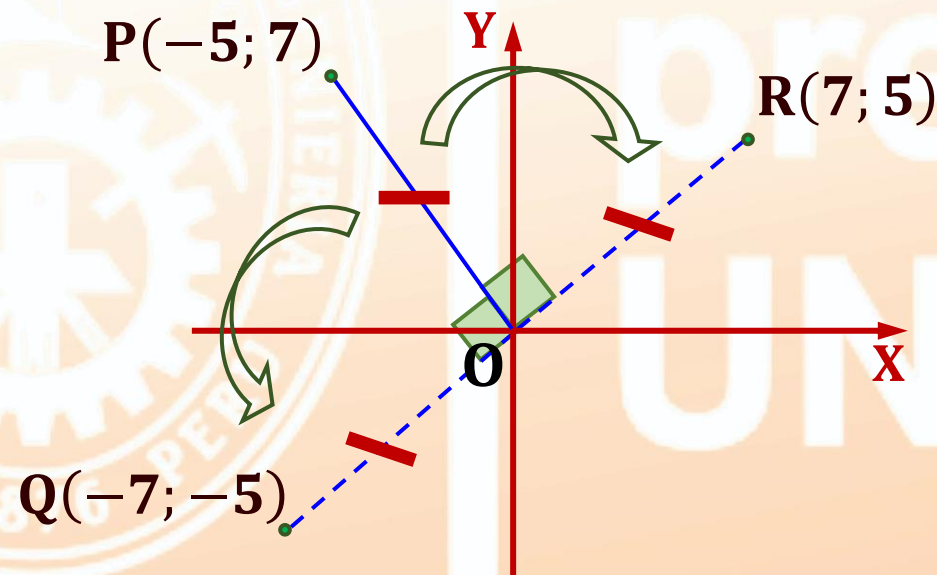
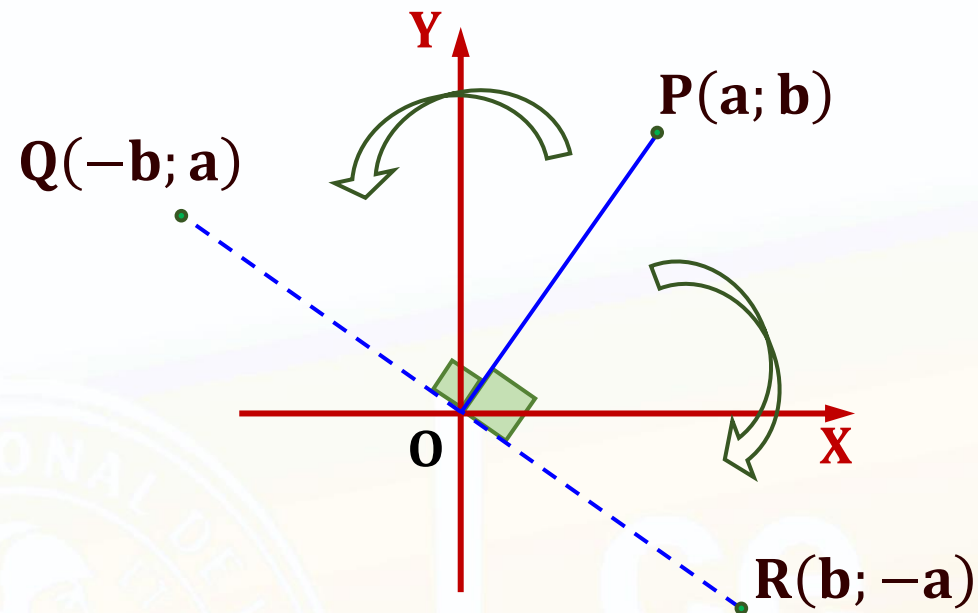
Análogamente, si consideramos una rotación de 90° en **sentido horario** al segmento $\overline{OP}$, obtenemos el segmento $\overline{OR}$, donde $R = (b; -a)$.

Ejemplo:

Según la observación anterior, ubique los segmentos $\overline{OQ}$ y $\overline{OR}$ en el plano cartesiano e indique las coordenadas de los puntos Q y R respecto del punto $P(-5; 7)$.

$$Q = (-7; -5)$$

$$R = (7; 5)$$



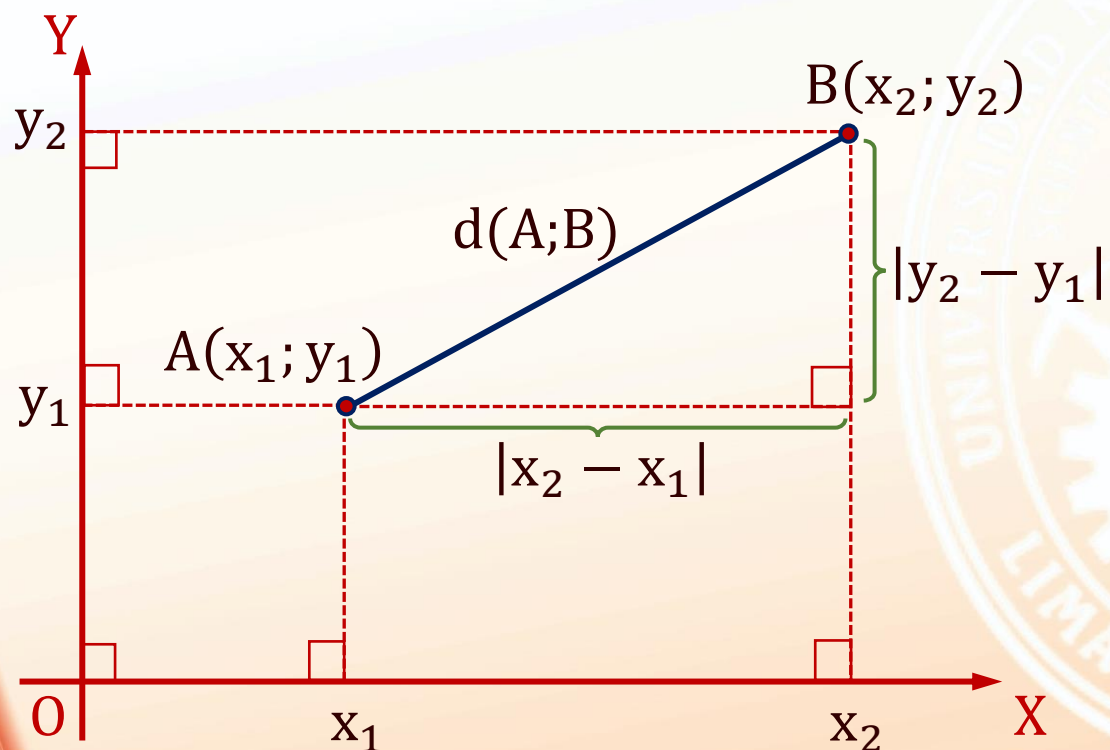
TEOREMA 01: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos del plano cartesiano $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$; la distancia entre ellos, denotada por $d(A, B)$, se calcula como

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración:

Graficando un caso práctico:



En el gráfico:

$$\begin{aligned} (d(A, B))^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PROBLEMA 01

En un cuadrado ABCD, $A(-2; -3)$ y $M(1; 6)$ es punto medio de $\overline{BC}$.

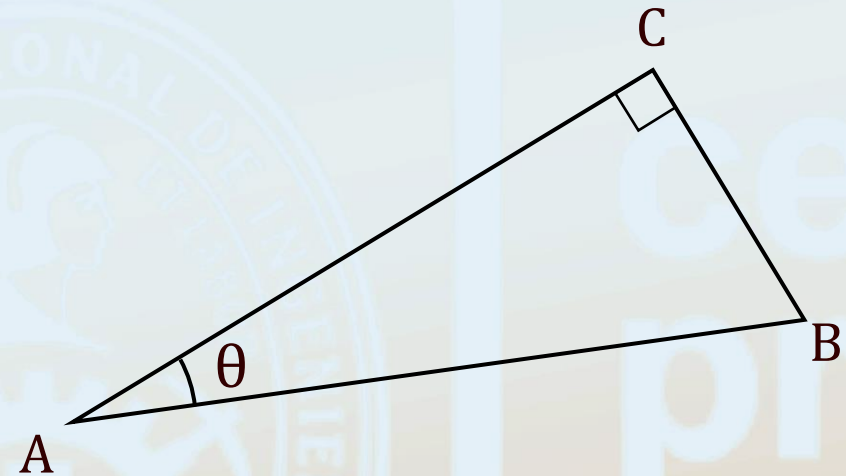
Calcule el área (en u^2) de la región interior al cuadrilátero AMCD.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 18 | B) 36 | C) 54 |
| D) 72 | E) 90 | |

CLAVE: C

PROBLEMA 02

En la figura mostrada $A(1; 3)$, $B(8; 4)$ y $\tan(\theta) = 1/3$. Calcule la distancia del punto C al origen de coordenadas (en u).



- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| A) $\sqrt{82}$ | B) $\sqrt{85}$ | C) $\sqrt{91}$ |
| D) $\sqrt{93}$ | E) $\sqrt{97}$ | |

CLAVE: B

PROBLEMA 03

En un rectángulo se sabe que dos vértices opuestos son $A(-5; 1)$ y $B(3; 7)$. Si uno de sus lados es el doble del otro, calcule el área (en u^2) de dicho rectángulo.

- A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 100

CLAVE: C**PROBLEMA 04 (Material de estudio - Problema 54)**

Sean los puntos $A\left(\frac{k^2}{4}; k\right)$, $k \in \mathbb{R}$ y $B(4; 0)$. Calcule el valor positivo de k para que la distancia entre los puntos A y B sea mínima.

- A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{6}$

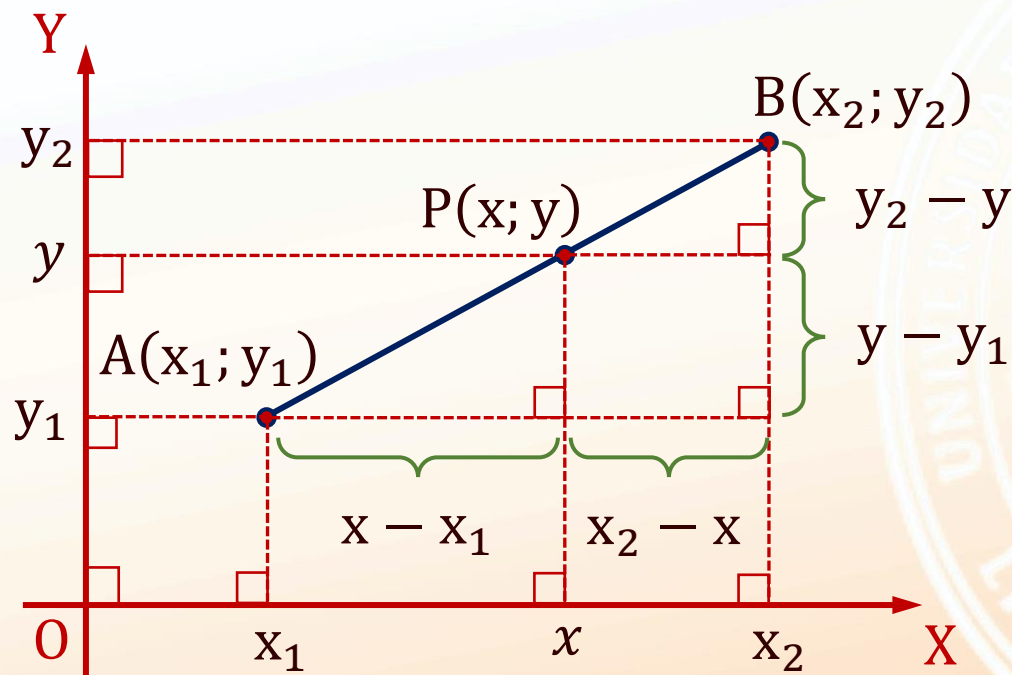
CLAVE: C

TEOREMA 02: DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Si $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ son los extremos del segmento $\overline{AB}$, las coordenadas de un punto $P(x; y)$ del segmento, que divide a este, en la razón dada $r = AP/PB$ se pueden calcular como:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r},$$

Demostración:



$$\frac{AP}{PB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \Rightarrow x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$\Rightarrow x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r \Rightarrow y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$\Rightarrow y(1 + r) = y_1 + ry_2$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

OBSERVACIÓN:

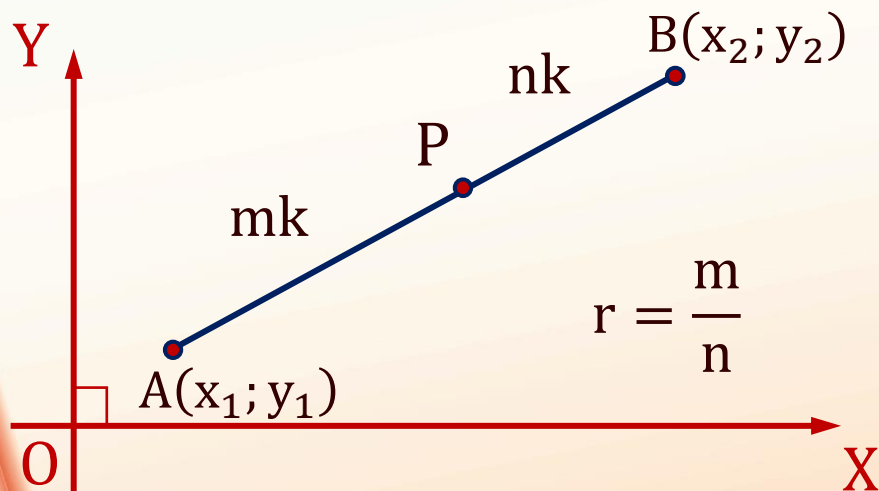
Si la razón dada es $r = \frac{m}{n}$, o sea $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$, entonces las coordenadas del punto P se calculan como:

$$(x; y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{n + m}; \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \right)$$

Y de forma abreviada:

$$P = \frac{n \cdot A + m \cdot B}{n + m}$$

En efecto:



$$(x; y) = \left(\frac{x_1 + \frac{m}{n}x_2}{1 + \frac{m}{n}}; \frac{y_1 + \frac{m}{n}y_2}{1 + \frac{m}{n}} \right)$$

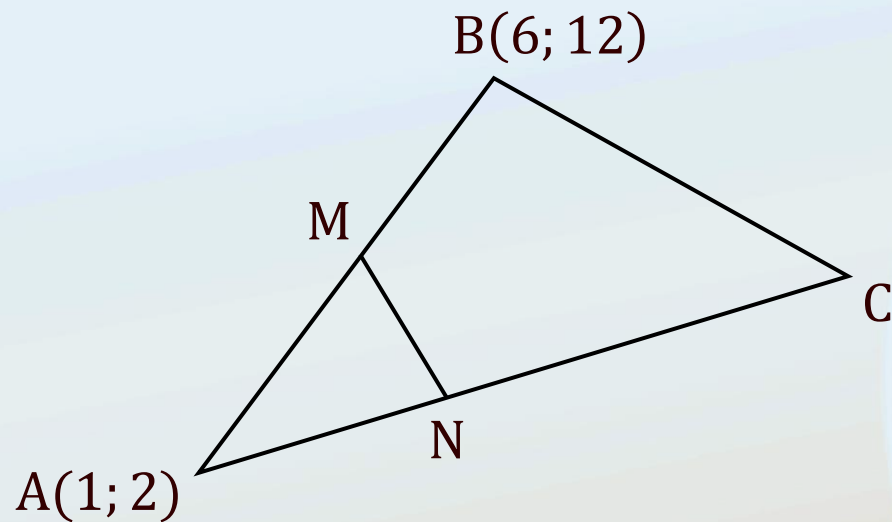
$$(x, y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{n + m}; \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \right)$$

$$P = \frac{n(x_1; y_1) + m(x_2; y_2)}{n + m}$$

$$\therefore P = \frac{nA + mB}{n + m}$$

PROBLEMA 05

El área de la región cuadrangular MNCB es el cuádruplo del área de la región triangular AMN y $NC = 2(AN)$. Calcule la suma de las coordenadas del punto M.



A) 3
D) 12

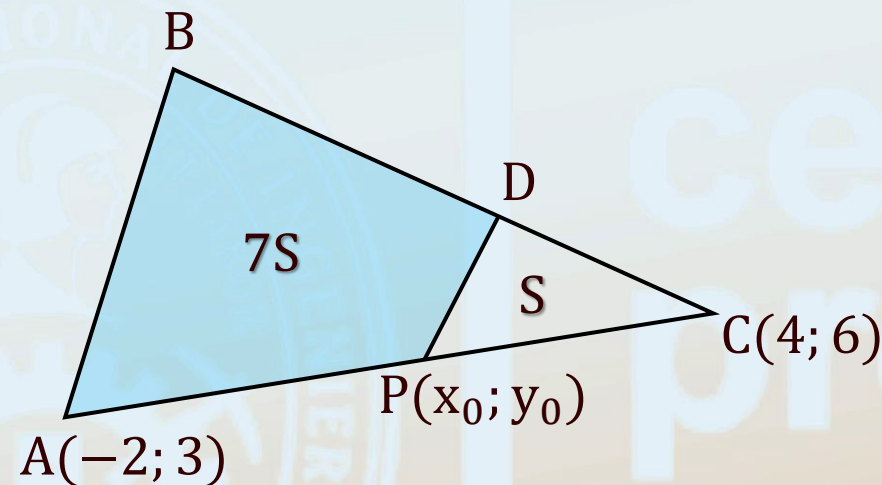
B) 6
E) 15

C) 9

CLAVE: D

PROBLEMA 06 (2da PC Cepre UNI 2015-1)

En la figura mostrada, S representa el área de una región plana y se cumple que $\frac{BD}{5} = \frac{DC}{3}$. Calcule $x_0 - y_0$.



A) -2
D) -9/2

B) -3
E) -6

C) -4

CLAVE: B

PROBLEMA 07

En la figura mostrada, las áreas de las regiones triangulares POB y POA están en relación de 2 a 3. Calcule las coordenadas del punto P

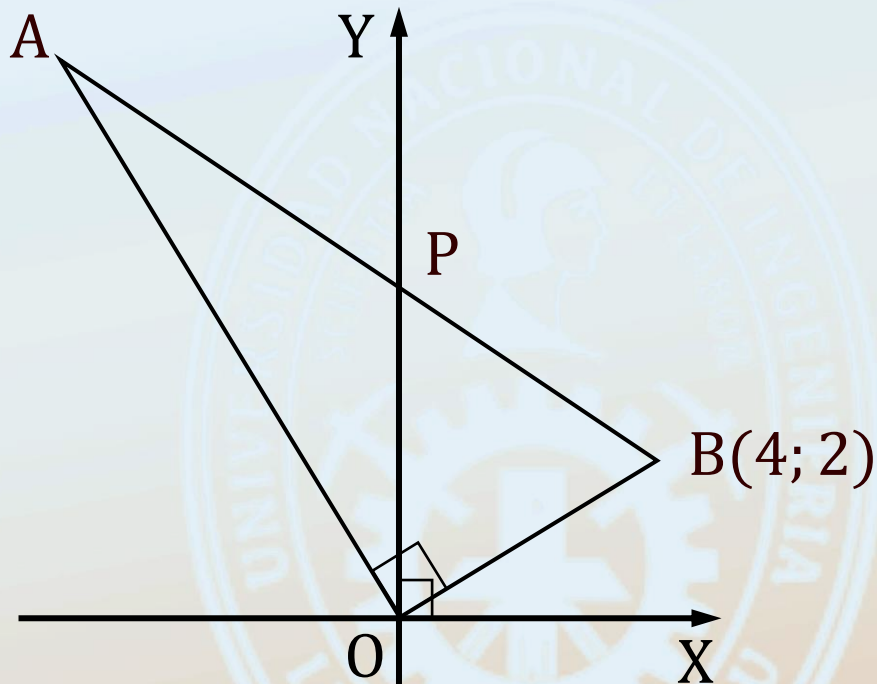
A) (0; 6)

B) (0; 5)

C) (0; 4)

D) (0; 3)

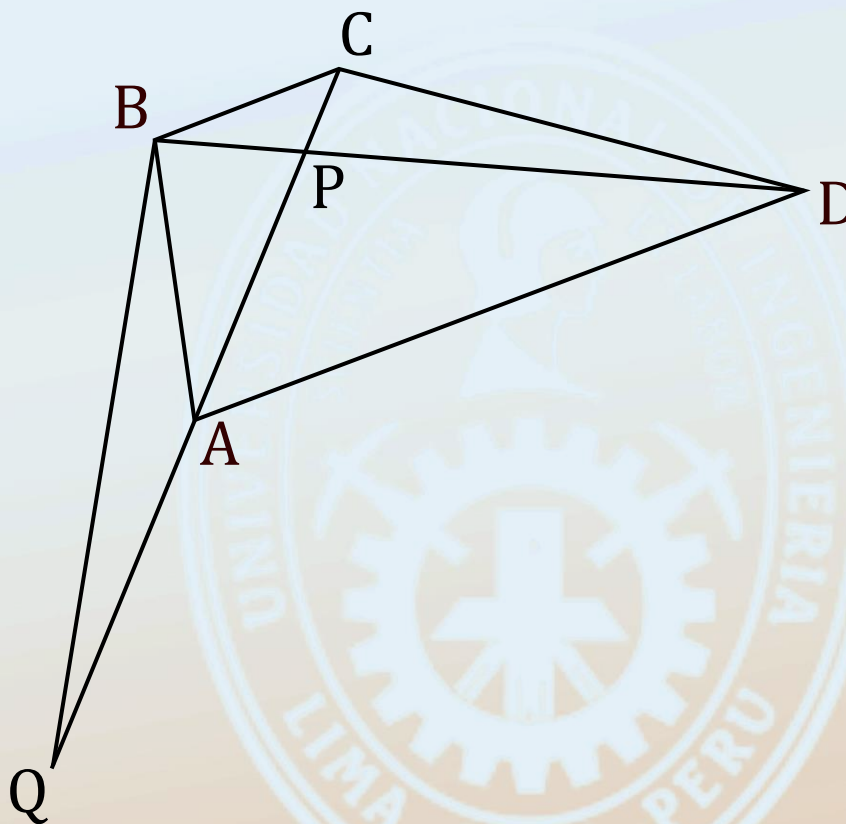
E) (0; 2)



CLAVE: A

PROBLEMA 08

En la figura mostrada, $Q(2; -3)$, $P(8; 12)$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y el área de la región BPQ es el triple del área de la región CPD. Calcule la suma de coordenadas del punto A



- A) 9
- B) 10
- C) 11
- D) 12
- E) 13

CLAVE: E

PROBLEMA 09

En la figura adjunta, se muestra dos circunferencias de radios 16 u y 9 u, además P, Q, R y T son puntos de tangencia. Calcule la diferencia entre la abscisa y la ordenada del punto T.

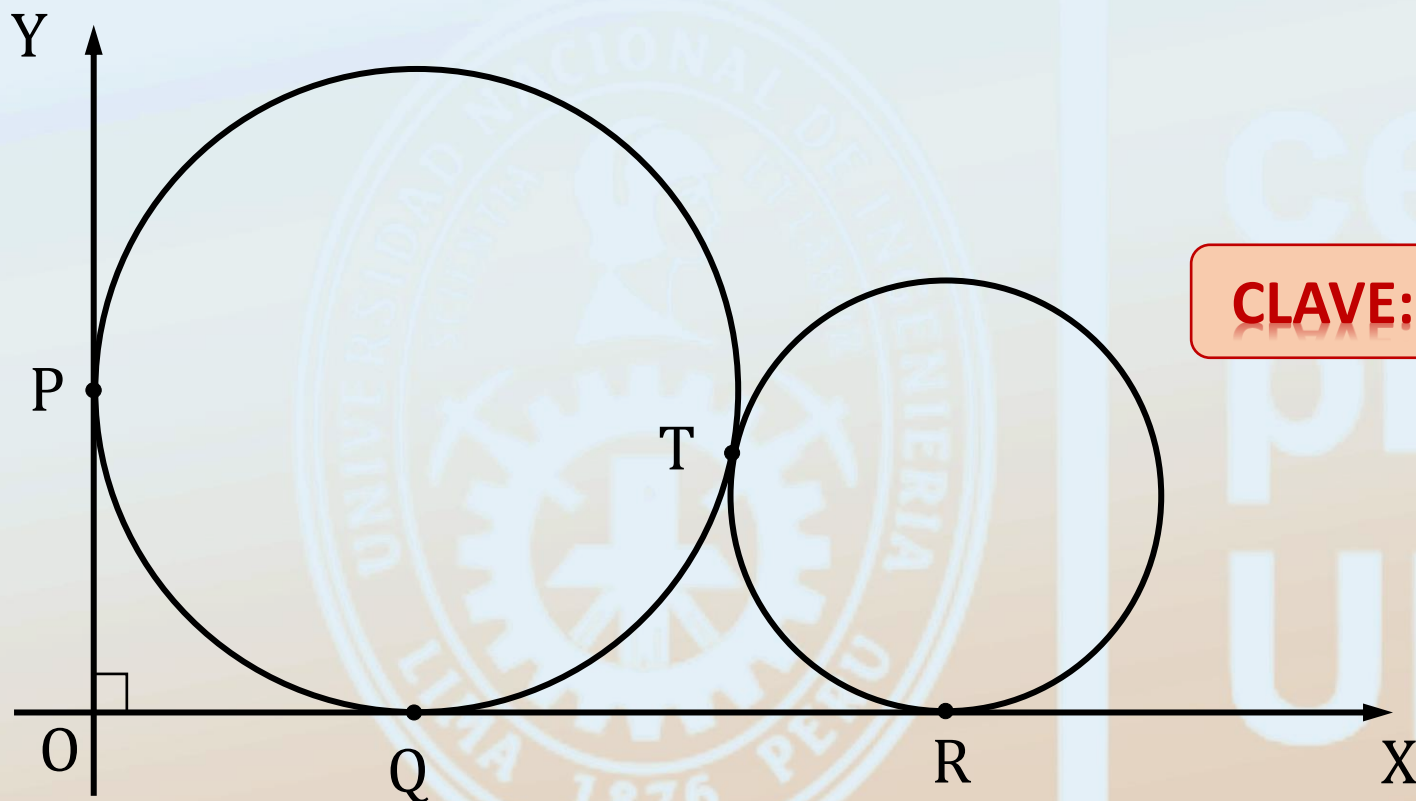
A) 19,74

B) 19,84

C) 19,94

D) 20,04

E) 20,14

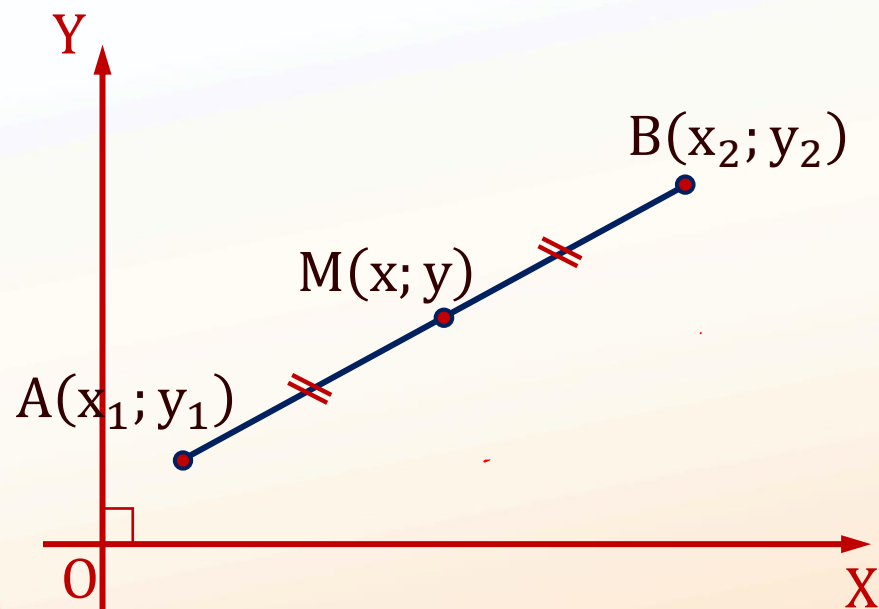

CLAVE: B

COROLARIO: PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Si $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ son los extremos de un segmento, entonces las coordenadas de su punto medio $M(x; y)$ son:

$$(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Demostración:



En la figura:

$$AM = MB \Rightarrow r = \frac{AM}{MB} = 1$$

Del teorema:

$$(x; y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{2}; \frac{y_1 + ry_2}{2} \right)$$

Como $r = 1$:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

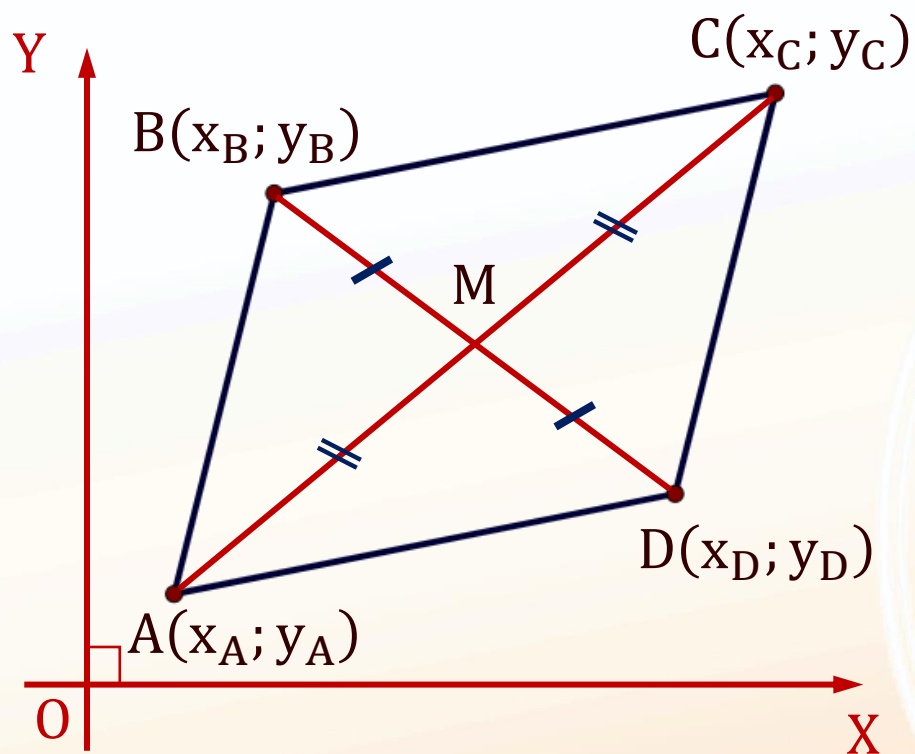
En forma sintética:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

PROPIEDAD 01:

En un paralelogramo de vértices A, B, C y D se cumple que: $A + C = B + D$.

Demostración:



Como M es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$:

$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2}$$

$$\therefore \boxed{A + C = B + D}$$

Es decir:

$$(x_A; y_A) + (x_C; y_C) = (x_B; y_B) + (x_D; y_D)$$

$$(x_A + x_C; y_A + y_C) = (x_B + x_D; y_B + y_D)$$

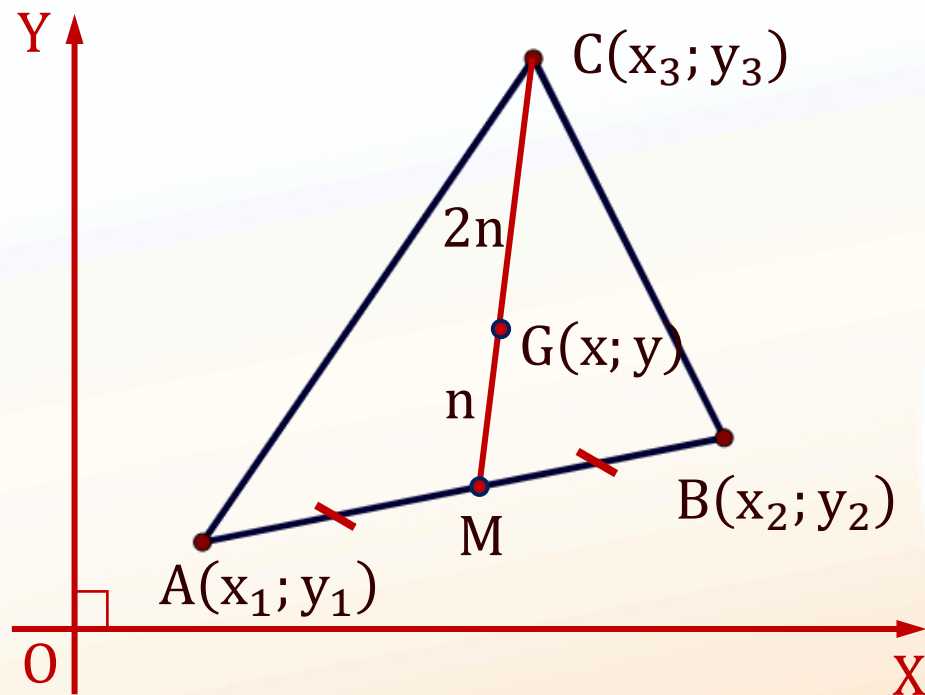
$$\therefore \boxed{x_A + x_C = x_B + x_D \wedge y_A + y_C = y_B + y_D}$$

PROPIEDAD 02: BARICENTRO DEL TRIÁNGULO

Dado el triángulo de vértices $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$; las coordenadas de su baricentro $G(x; y)$ están dadas por:

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

Demostración:



Del gráfico:

M es punto medio de $\overline{AB}$: $\Rightarrow M = \frac{A + B}{2}$

Como G es baricentro: $CG = 2GM$

$$\Rightarrow G = \frac{\cancel{n}C + 2\cancel{n}M}{3\cancel{n}} = \frac{C + 2\left(\frac{A + B}{2}\right)}{3}$$

$$\therefore \boxed{G = \frac{A + B + C}{3}}$$

De forma equivalente:

$$(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

PROBLEMA 10 (2 PC CEPRE UNI 2018 - 2)

De un paralelogramo ABCD, las coordenadas de tres de sus vértices son: A(-3;1), B(-1;4) y D(2;-1). Calcule las coordenadas del baricentro del triángulo BCD.

A) $(1/3; 2/3)$

B) $(1; 5/3)$

C) $(2; 4/3)$

D) $(5/3; 5/3)$

E) $(1; 1/3)$

CLAVE: D**PROBLEMA 11 (Material de estudio - Problema 59)**

Las coordenadas de los vértices (en u) de un triángulo son A(-6; 1), B(4; -3), C(-7; -4). Calcule la distancia del origen del sistema de coordenadas al baricentro del triángulo (en u).

A) 2

B) $\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $\sqrt{13}$

CLAVE: E

PROBLEMA 12

Se tiene un cuadrado ABCD, en sentido antihorario, tal que $A(0; 0)$ y $B(15; 0)$, se construye una semicircunferencia de diámetro AB, interior al cuadrado y desde el vértice C se traza $\overline{CT}$ tangente a la semicircunferencia, siendo T punto de tangencia.

Calcule las coordenadas del baricentro del triángulo ATB.

CLAVE: D

- A) (5; 1) B) (5; 2) C) (6; 1) D) (6; 2) E) (6; 3)

PROBLEMA 13

Sea $G(2; 3)$ el baricentro de un triángulo ABC. $G_1(4; 6)$ y $G_2(3; -1)$ son los baricentros de los triángulos ABG y ACG, respectivamente.

Calcule el producto de abscisas de los vértices A y C.

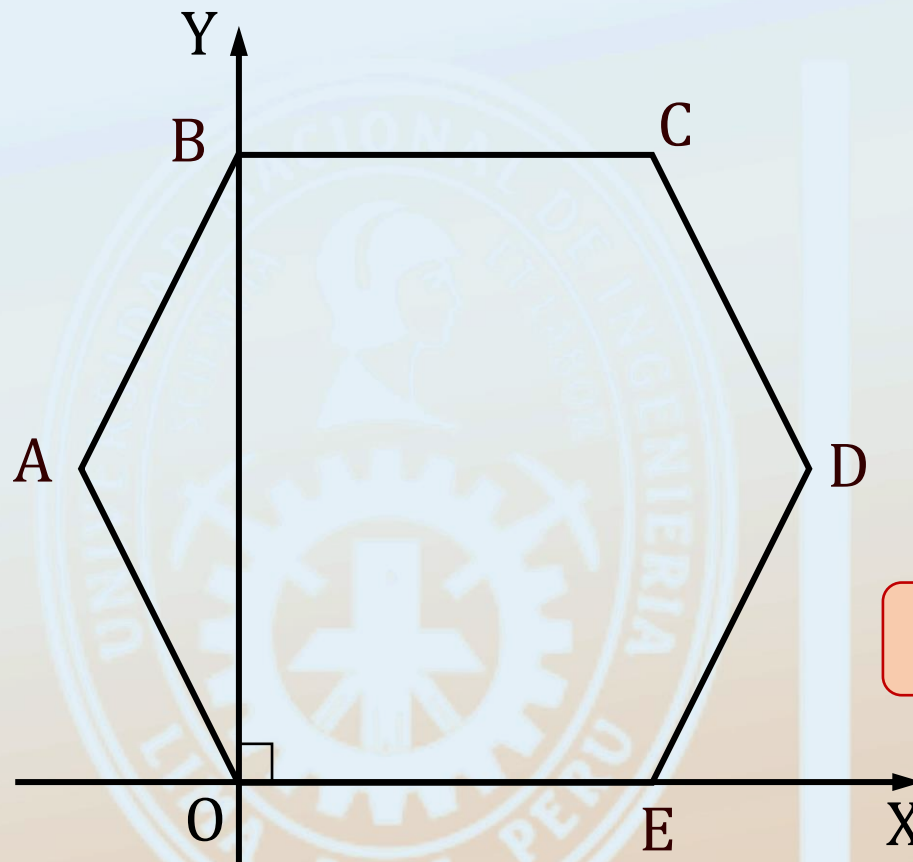
CLAVE: C

- A) -20 B) -32 C) -44 D) 30 E) 45

PROBLEMA 14 (Material de estudio - Problema 56)

La figura mostrada, es un hexágono regular OABCDE con lados de longitud 4 u. Calcule las coordenadas del baricentro (en u), del triángulo que se forma al unir los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.

- A) $(1; 2\sqrt{3})$
- B) $(3; 3\sqrt{3})$
- C) $\left(\frac{4}{3}; 8\sqrt{3}\right)$
- D) $\left(4; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$
- E) $\left(6; \frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$



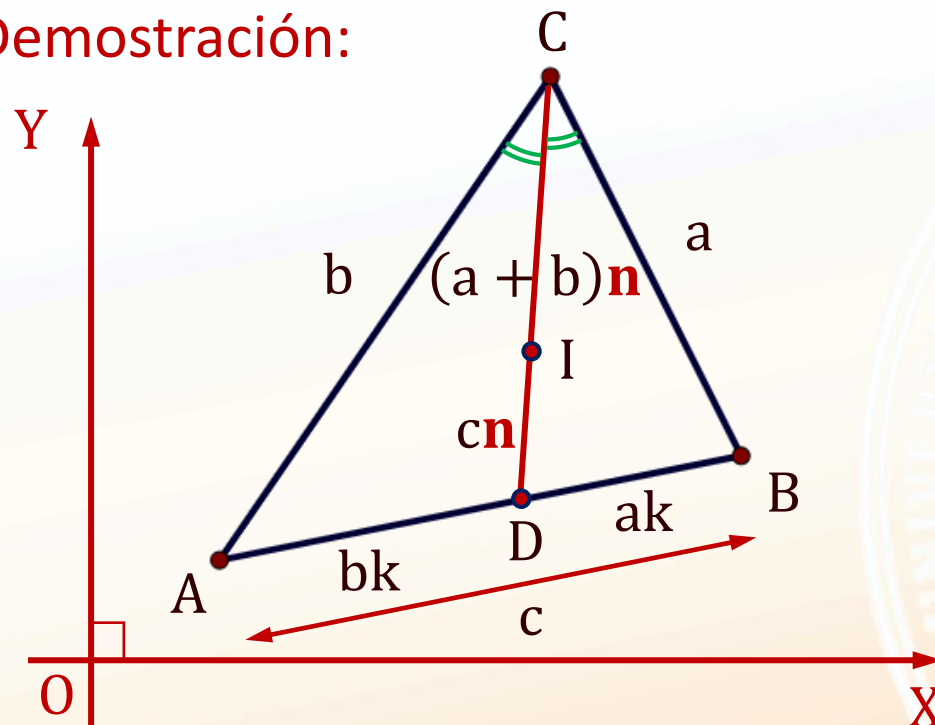
CLAVE: D

PROPIEDAD 03: INCENTRO DEL TRIÁNGULO

En el triángulo ABC, con $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ las coordenadas de su incentro I se calculan mediante:

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}$$

Demostración:



$\overline{CD}$ es bisectriz: $\frac{AD}{DB} = \frac{bk}{ak}$

$$D = \frac{bkB + akA}{(b+a)k} = \frac{bB + aA}{b+a}$$

$$\Rightarrow D(a+b) = bB + aA \dots (1)$$

I es incentro: $\frac{CI}{ID} = \frac{(a+b)n}{cn}$

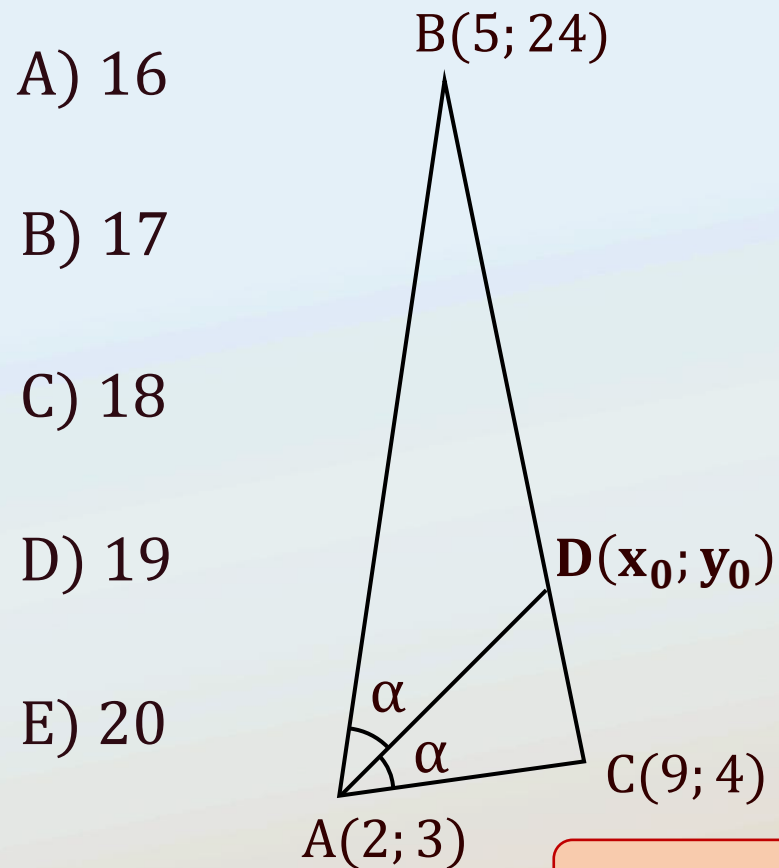
$$I = \frac{(a+b)nD + cnC}{(a+b+c)n} \dots (2)$$

(1) en (2):

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}$$

PROBLEMA 15

En la figura mostrada, calcule el valor de $x_0 + y_0$.



CLAVE: B

PROBLEMA 16

Si los vértices de un paralelogramo son $A(1; -1)$, $B(5; 9)$, $C(11; 11)$ y D . Calcule la diferencia de las coordenadas del incentro del triángulo MOD , siendo M el punto medio de $\overline{AB}$ y O es el origen del sistema.

- A) 7
B) $7 - \sqrt{2}$
C) $7 - 2\sqrt{2}$
D) $7 - 3\sqrt{2}$
E) $7 - 4\sqrt{2}$

CLAVE: E

PROBLEMA 17

En la figura, el triángulo ABC es recto en B, además I es su incentro. Calcule el área (en u^2) de la región sombreada.

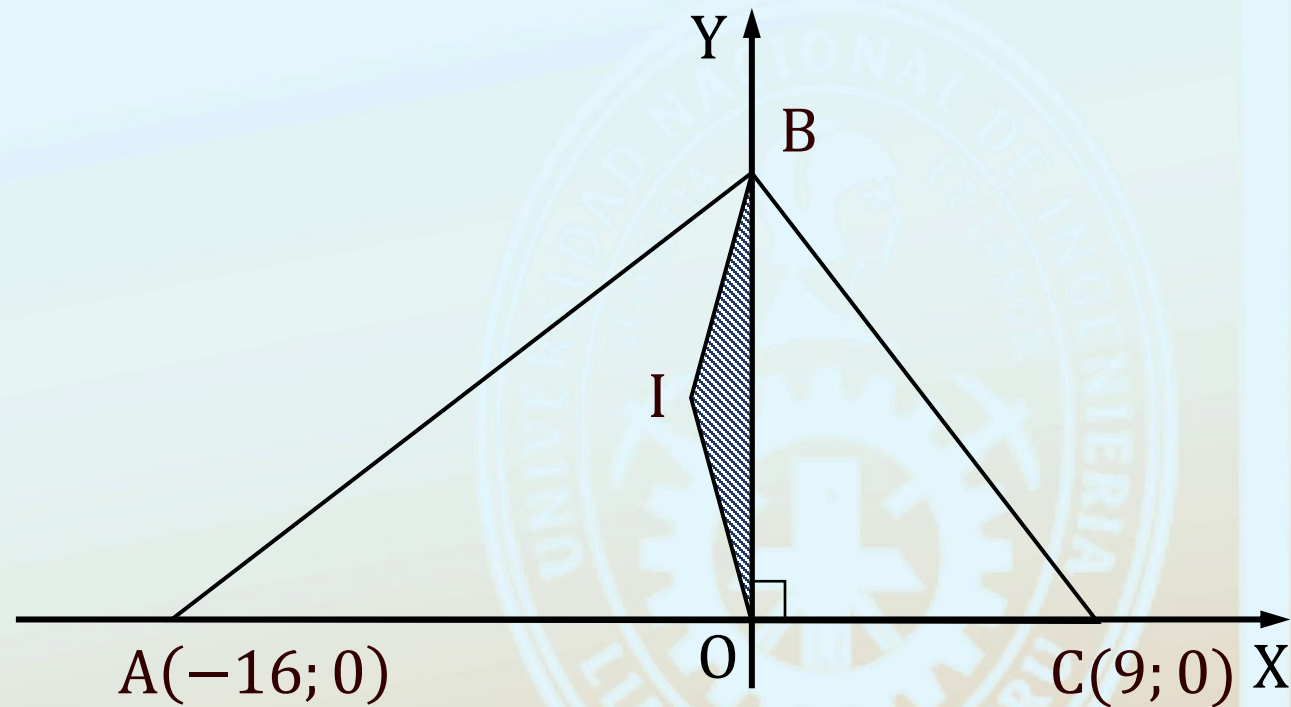
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8



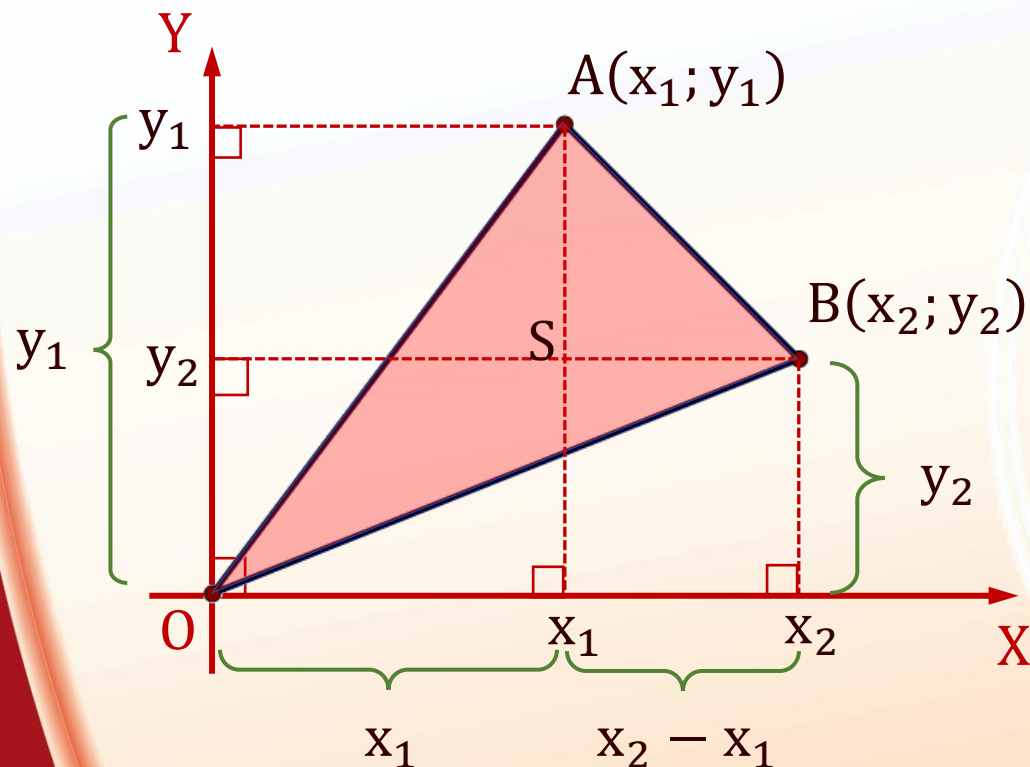
CLAVE: D

TEOREMA 03: ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR – CASO PARTICULAR

Dado el triángulo de vértices O , $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$, el área (S) de la región triangular se calcula como:

$$S = \frac{1}{2} |x_2 y_1 - x_1 y_2|$$

Demostración:



Calculamos el área de la región sombreada

$$S = \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{(y_1 + y_2)}{2} (x_2 - x_1) - \frac{x_2 y_2}{2}$$

$$S = \frac{\cancel{x_1 y_1} + x_2 y_1 - \cancel{x_1 y_1} + \cancel{x_2 y_2} - x_1 y_2 - \cancel{x_2 y_2}}{2}$$

$$\therefore S = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{2}$$

En general:

$$S = \frac{1}{2} |x_2 y_1 - x_1 y_2|$$

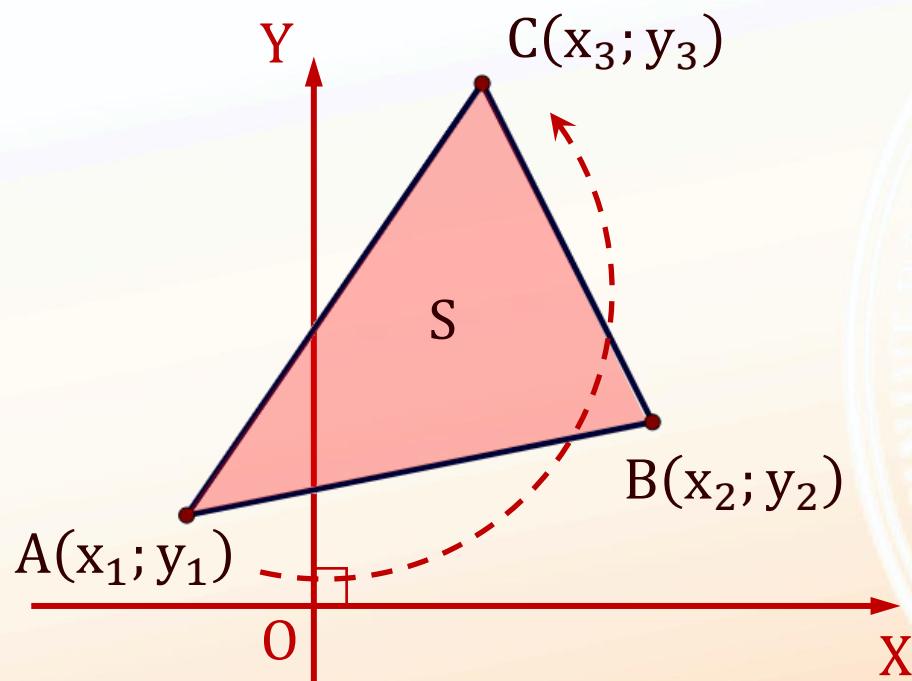
$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

TEOREMA 04: ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR – CASO GENERAL

Dado el triángulo de vértices $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$. El área de la región que encierra dicho triángulo se obtiene mediante:

$$S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3|$$

Considerando el siguiente arreglo:



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (+) \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} x_2 \cdot y_1 \\ x_3 \cdot y_2 \\ x_1 \cdot y_3 \end{array} \begin{array}{c} \hline I \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{\text{red}} & y_1 \\ x_2 & \xrightarrow{\text{green}} & y_2 \\ x_3 & \xrightarrow{\text{green}} & y_3 \\ x_1 & \xrightarrow{\text{red}} & y_1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_3 \\ x_3 \cdot y_1 \end{array} \downarrow (+) \\ \hline D \end{array}
 \end{array}$$

Se obtiene:

$$S = \frac{|D - I|}{2}$$

PROBLEMA 18 (2da PC Cepre UNI 2019-2)

Los vértices de un triángulo ABC son $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$ y $C(2; -1)$. Calcule la longitud (en u) de la altura trazada desde el vértice C al lado AB.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

CLAVE: D**PROBLEMA 19 (2da PC CEPRE UNI 2023-2)**

Sea el triángulo ABC de vértice $C(1; 8)$ y los puntos $M(-6; 4)$, $N(-3; 2)$ son puntos de trisección del lado AB. Calcule el área (en u^2) de la región triangular ABC.

A) 25

B) 27

C) 30

D) 35

E) 39

CLAVE: E

PROBLEMA 20

Sean los puntos $A(-2;1)$ y $B(3;3)$. Se ubica un punto C en el semieje de abscisas negativas, tal que el área de la región triangular ABC sea igual a $10,5 u^2$. Calcule la distancia (en u) entre los puntos B y C .

CLAVE: A

- A) $3\sqrt{37}$ B) $2\sqrt{37}$ C) $2\sqrt{39}$ D) $3\sqrt{39}$ E) $5\sqrt{39}$

PROBLEMA 21

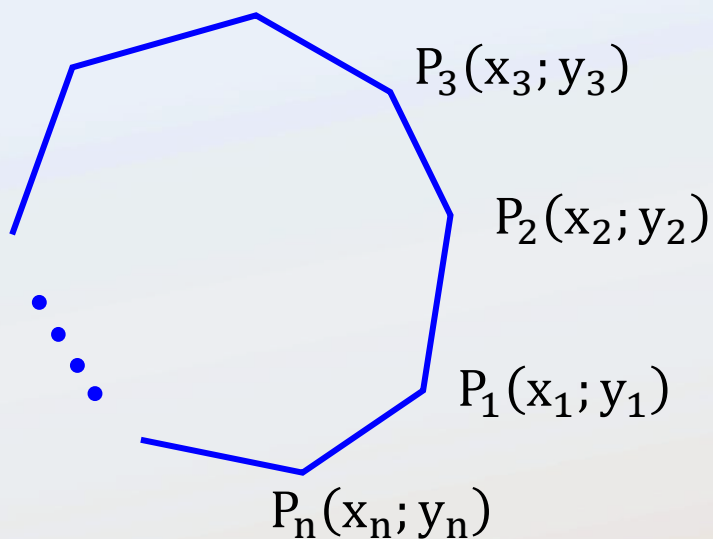
Dado el triángulo ABC , tal que $A(-4;7)$ y $B(3;-4)$. Si se sabe que el área de la región triangular ABC es $19 u^2$ y que el vértice C tiene por coordenadas dos números enteros consecutivos. Calcule la ordenada de C .

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CLAVE: C

TEOREMA 05: ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL:

Dado el polígono de vértices $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$, tomados en sentido antihorario. El área S de la región que encierra dicho polígono se obtiene mediante:



$$\begin{array}{c}
 (+) \downarrow \begin{array}{c} x_2 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_1 \cdot y_n \end{array} \quad \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} x_1 \cdot y_2 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_1 \end{array} \downarrow (+) \\
 \hline I \qquad \qquad \qquad D
 \end{array}$$

$$S = \frac{|D - I|}{2}$$

PROBLEMA 22 (2da PC Cepre UNI 2014-2)

De la figura mostrada S_1 y S_2 son las áreas de las regiones triangulares en u^2 . Calcule $S_2 - S_1$.

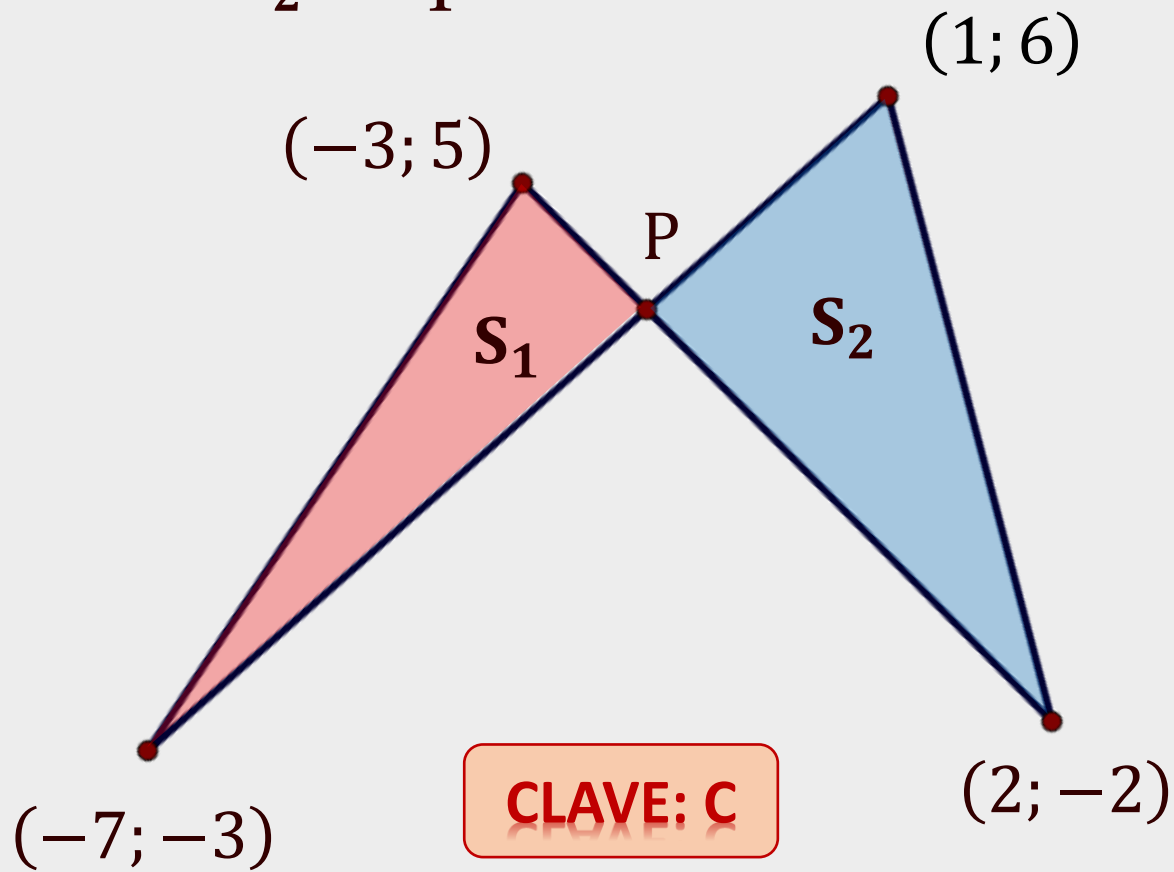
A) 1,5

B) 2,0

C) 2,5

D) 3,0

E) 3,5



PROBLEMA 23

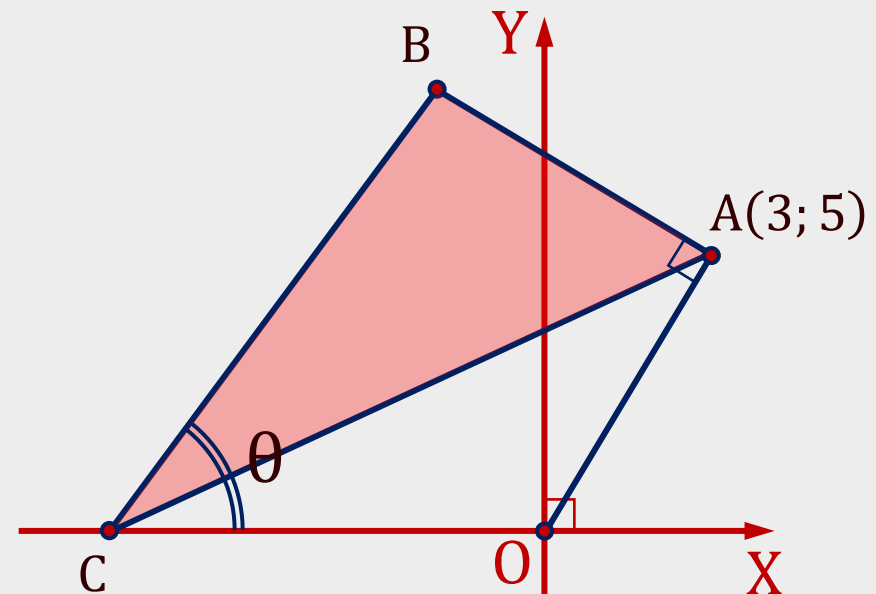
Dados los vértices de un pentágono no regular $A(2; 1)$, $B(0; 5)$, $C(-4; 3)$, $D(-2; -4)$ y $E(1; -3)$, calcule el área (en u^2) de la región interior a dicho pentágono.

- A) $\frac{61}{2}$ B) 31 C) $\frac{65}{2}$
D) 33 E) $\frac{69}{2}$

CLAVE: E

PROBLEMA 24

En la figura mostrada $OA = AB$, $\tan(\theta) = 4/3$. Calcule el área de la región sombreada (en u^2).

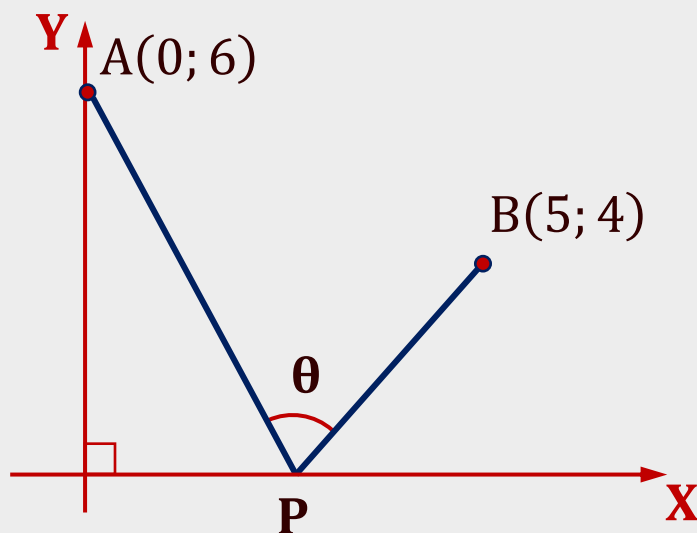


- A) 17 B) 21 C) 27
D) 29 E) 31

CLAVE: D

PROBLEMA 25

En la figura mostrada $(AP + PB)$ es mínima. Calcule el área de la región triangular ABP.



- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

CLAVE: E

PROBLEMA 26 (Mat. de estudio –

~~D62)~~ Dados los puntos $A(6; 6)$ y $B(9; 4)$. Calcule las coordenadas de los puntos N y M sobre el eje X y eje Y respectivamente de tal manera que la longitud $(AM + MN + NB)$ sea la menor posible.

- A) $M = (0; 2), N = (3; 0)$
B) $M = (0; 3), N = (2; 0)$
C) $M = (0; 2), N = (2; 0)$
D) $M = (0; 3), N = (1; 0)$
E) $M = (0; 3), N = (3; 0)$

CLAVE: A